جبر خطی

(اسلایدهای دوره)

وجیهه مبشری

data-hub

سرفصل مطالب

- جلسه اول: مفهوم اسکالر، وکتور، ماتریس، تانسور
- جلسه دوم: عملیات جمع و تفریق ماتریس ها، ضرب ماتریس ها، منفی کردن ماتریس ها، ضرب اسکالر در ماتریس
- جلسه سوم: دترمینان ماتریس
- جلسه چهارم: ترانهاده و تریس ماتریس
- جلسه پنجم: ماتریس کهاد، همسازه، الحاقی و معکوس ماتریس ها
- جلسه ششم: ماتریس های خاص، بالا مثلثی، پایین مثلثی، خلوت، همانی

سرفصل مطالب

- جلسه هفتم: نرم ها
- جلسه هشتم: اعمال سطری مقدماتی در ماتریس ها و رتبه ماتریس
- جلسه نهم: مستقل خطی و وابسته خطی
- جلسه دهم: مقدار ویژه و بردار ویژه
- جلسه یازدهم: معکوس تعمیم یافته
- جلسه دوازدهم: تجزیه مقادیر منفرد، ماتریس متعامد، مقادیر منفرد
- جلسه سیزدهم: تحلیل مولفه اساسی

#DONTFORGETUS

آموزش های
رایگان بیشتر

www.data-hub.ir
www.t.me/data_hub_ir
www.github.com/datahub-ir
www.linkedin.com/company/data-hub-ir

~~کل~~ [صحیح]

اسکالر = ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، -۶,۶۵ ، -۱۲

سطری

Vector = $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ستونی

بعد ۱

سطر

ستون

ماتریس = $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱۰ & ۱۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$

سطر = ۱

ستون = ۱

ل

سطر + ستون

۱ + ۱ = $\boxed{\text{۲ بعد}}$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱۰ \\ -۱ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

تعداد سطرها ۳ × ۳ تعداد ستونها

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 1 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 11 & 12 & 15 \\ -10 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

[وکتورها حالت خاصی از ماتریس ها هستند]

درایه

$$\begin{array}{c|ccc} & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۱۵_{۱\times۱} & ۱۲_{۱\times۲} & ۲_{۱\times۳} \\ ۲ & -۱_{۲\times۱} & ۵_{۲\times۲} & ۳_{۲\times۳} \\ ۳ & ۱_{۳\times۱} & ۴_{۳\times۲} & ۵_{۳\times۳} \end{array}$$

تعداد درایه‌های یک ماتریس $= m \times n$

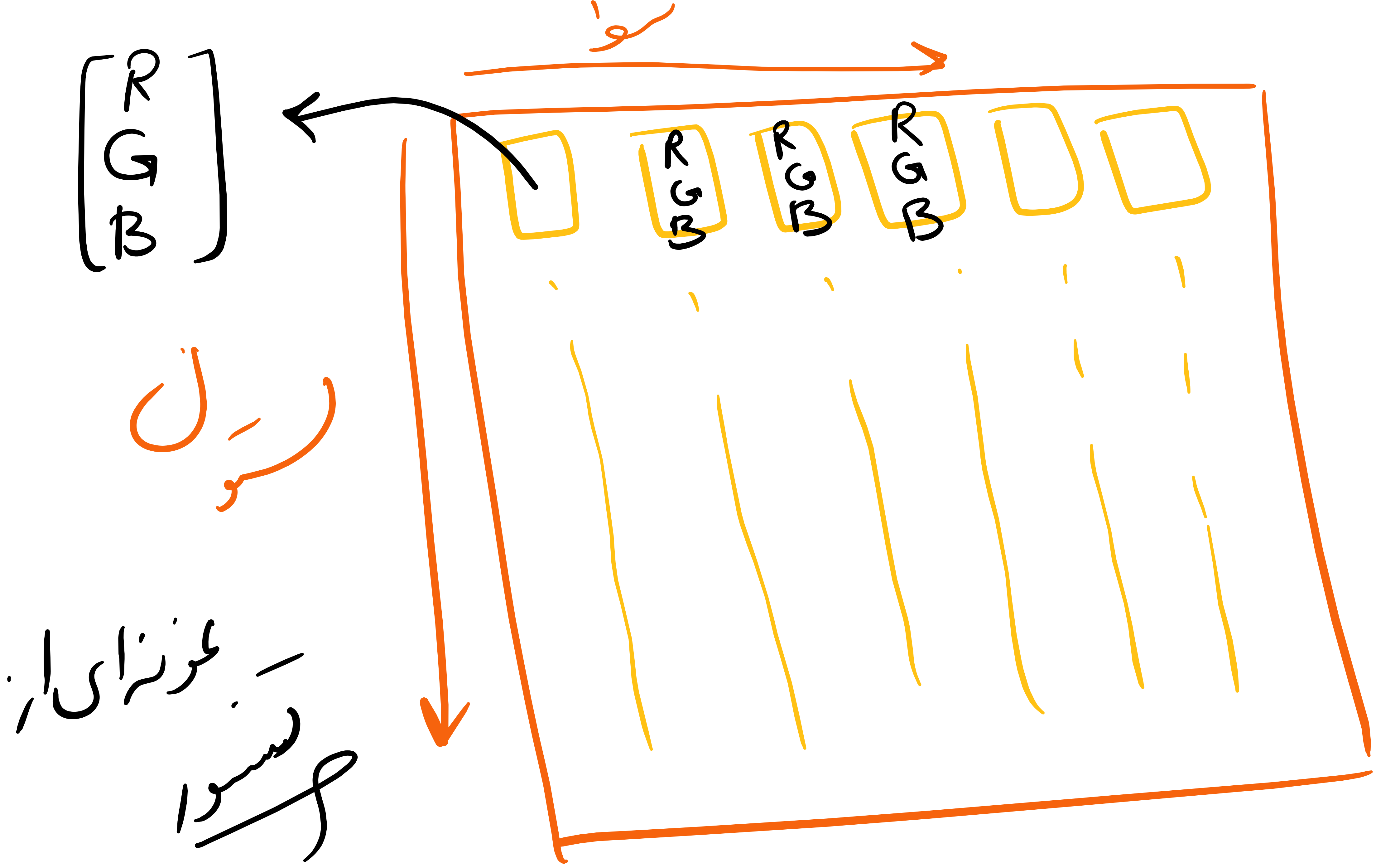
$A_{۳\times۲} = ۶$

$m =$ سطرها $\leftarrow ۳\times۳ \rightarrow$ ستون‌ها $= n$

$m \times n$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۱۰ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۱۱ \\ ۱۲ \\ ۱۳ \end{bmatrix} \\ - & - & - \end{bmatrix} = \text{تانسور}$$

$$m \times n \times h$$


R G B
R G B
R G B
R G B

ج:

$$\begin{array}{cc} ١,١ & ١,٢ \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}} \end{array} \pm \begin{array}{cc} ١,١ & ١,٢ \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix}} \end{array} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ ١٠ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$٢\times٢ \qquad ٢\times٢ \qquad ٢\times٢$

$\Big]\,٢\times٢=٤\,\Big] \qquad \Big]\,٢\times٢=٤\,\Big]$

تفريق

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٤ \\ -٤ & -٤ \end{bmatrix}$$

ماتریس × اسکالر

$$۲ \times \begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۸ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱۲ \\ ۱۶ & ۲۴ \end{bmatrix}$$

قرینه کردن
ماتریس

$$-\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & -14 \\ +5 & -6 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس ها :

$$\overset{A}{\overbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}}}_{\underbrace{m}_{\text{سطر}} \times \underbrace{n}_{\text{ستون}}} \times \overset{B}{\overbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}}}_{\underline{n} \times \underline{h}} = AB$$

تعداد ستون های ماتریس اول

॥

تعداد سطرهای ماتریس دوم

$$A_{m \times n} \times B_{n \times h} = AB$$

$$B_{n \times h} \times A_{m \times n} = \cancel{AB}$$

$$h \neq m$$

$$\checkmark\ AB \not\longrightarrow \cancel{BA}\ \checkmark$$

$(-۲)(-۱۰) = (-۱۰)(-۲)$

$۲۰ = ۲۰$ خاصیت جابجایی ✓

خاصیت جابجایی ضرب ۲ ماتریس قابل قبول نیست

$$A_{n\times n} B_{n\times n} \neq B_{n\times n} A_{n\times n}$$

ضرب ماتریس‌ها :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cancel{3} \times \cancel{3}$ $\cancel{3} \times 2$

$1+0+0=1$

$2+0+5=7$

$6+4=10$

$12+2+1=15$

$1+6+0=7$

$2+3+2=7$

$$AB = \begin{bmatrix} 1_{(1,1)} & 7_{(1,2)} \\ 10_{(2,1)} & 15_{(2,2)} \\ 7_{(3,1)} & 7_{(3,2)} \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 = 6$

$$A_{m \times \cancel{n}} \times B_{\cancel{n} \times p} = AB_{m \times p}$$

$$B_{m \times p} \times A_{m \times p} = \cancel{AB}$$

دترمینان ماتریس ۲×۲ :

قطر اصلی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

قطر فرعی

$|A| \rightarrow$ دترمینان ماتریس A

$$A = \begin{vmatrix} ۵ & ۰ \\ ۱ & ۶ \end{vmatrix} = ۳۰ - ۰ = ۳۰$$

$$\boxed{|A| = ۳۰} \rightarrow$$

کل در ماتریس

یک

عدد است.

دترمینال ماتریس ۳×۳ م

$$\begin{array}{ccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 \\ \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 - 6 = -4$$

$$|A| = 5$$

$$1 \times 4 \; - \; 2 \times 0 = \; + \; 0 \times -4 \; = \; 5$$

$$5 \qquad 0 \qquad 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$+ c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

ترانهاده یک ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}}_{A^T}$$

1) $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^T)^T = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}}_{= A}$$

A ، B ، ۲ ماتریس هستند. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} + B^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$(kA)^T = kA^T \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}} \xRightarrow{\times ۲} ۲ \overset{A}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} = (kA)^T$$

$$A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \longrightarrow kA^T = ۲ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

$=$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} * A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

Trace ماتریس :

قطر اصلی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$i = 1, \dots, m$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ii} = tr(A)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a_{11} a_{12} a_{21} a_{22}

اصلی　　　　　　　　　　　　　فرعی

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۶ \\ ۸ & ۲ & ۷ \\ ۹ & ۱۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Trace} = ۱+۲+۳ = \boxed{۶}$$

مهم

$$۱)\quad tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} + B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{tr(A+B)=۴}$$

$$tr(A)=۲ \;+\; tr(B)=۲ = \boxed{۴}$$

۲) $\operatorname{tr}(cA) = c\,\operatorname{tr}(A) \qquad c \in \mathbb{R}$

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow c = ۳ \qquad \operatorname{tr}(A) = ۲$

$c\,\operatorname{tr}(A) =$

$cA = ۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow ۳ \times ۲ = ۶$

$\operatorname{tr}(cA) = ۶$

$=$

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$$

$$A = \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۵} \\ \text{۷} & \text{۶} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{tr}(A) = \text{۷}$$

$$\|$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۷} \\ \text{۵} & \text{۶} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{tr}(A^T) = \text{۷}$$

$$\operatorname{tr}(\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times n}{B}) = \operatorname{tr}(\underset{n\times n}{B}\,\underset{n\times n}{A})$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{tr}(AB) = \boxed{۸}$$

$$\|$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱۲ & ۷ \end{bmatrix} = \boxed{۸}$$

معکوس ماتریس ۲×۲ ها

$$\begin{cases} A A^{-1} = I \\ A^{-1} A = I \end{cases}$$

ماتریس همانی

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس ۲×۲ :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۶ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ۱۰ - ۶ = \boxed{۴}$$

$$\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۴ & -۱/۴ \\ -۶/۴ & -۲/۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس ۳×۳ :

۱) کهاد ۲) همسازه ۳) الحاقی ۴) دترمینان

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس کهاد؟

دونه دونه عناصر رو سطر و ستونشو حذف کن، دترمینان ماتریس 2×2 حاصل رو حساب بکن، جایگذاری کن: ← ماتریس هماد

$$A = \begin{bmatrix} \text{۳} & \text{۰} & \text{۲} \\ \text{۲} & \text{۰} & -\text{۲} \\ \text{۰} & \text{۱} & \text{۱} \end{bmatrix}$$

$$\text{ماتریس هماد} = \begin{bmatrix} +\text{۲} & \text{۲} & \text{۳} \\ -\text{۲} & \text{۳} & \text{۳} \\ \text{۶} & -\text{۱۰} & \text{۶} \end{bmatrix}$$

ماتریس همسازه : ⟸ عناصر ماتریس کهاد ریکی × ستون × منفی

$$\begin{bmatrix} {}^{+}2 & {}^{-}2 & {}^{+}3 \\ {}^{-}(-2) & {}^{+}3 & {}^{-}3 \\ {}^{+}5 & {}^{-}(-10) & {}^{+}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ +2 & +3 & -3 \\ 5 & +10 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس همسازه

ماتریس ارمیتی : ترانهاده ماتریس همانه

H

$$\text{ماتریس} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\det} \times H^{T}}_{A^{-1}} = -\frac{1}{10} H^{T}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (1)(-6-4) = -10$$

$$0 \; \boxed{-} \; \cancel{0} \; \boxed{+} \; -10$$

$$A^{-1}A = I_{r \times r}$$

$$AA^{-1} = I_{r \times r}$$

ماتریس همانی => ماتریس مربعی که تمام عناصر قطر اصلی آن ۱ و

بقیه عناصر صفرند.

$$I_{n\times n} = I_n \Rightarrow I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n\times n$

2×2

3×3

5×5

$$I_{3\times 3} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_r \, I_r = I_r$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n \times I_n = I_n$$

$$A_{m \times n}$$

$$I_{m \times \cancel{m}} \, A_{\cancel{m} \times n} = \boxed{A_{m \times n}}$$

$$A_{m \times \cancel{n}} \, \underbrace{I_{\cancel{n} \times n}}_{= I_n} = \boxed{A_{m \times n}}$$

۳) $\det(I_n) = 1$

$$I_{۲} = \begin{bmatrix} 1 & ۰ \\ ۰ & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |I_{۲}| = 1$$

ماتریس بالا مثلثی:

مربعی

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

خاصیت مهم ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی

$\det(A) =$ ضرب عناصر قطر اصلی

بالا یا پایین مثلثی

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) =$$

$$|A| = ۱ \times ۲ \times ۸$$

$$\boxed{= ۱۶}$$

✓

خلوت یا Sparce:

که تعداد درایه‌های غیرصفر خیلی کم هستند

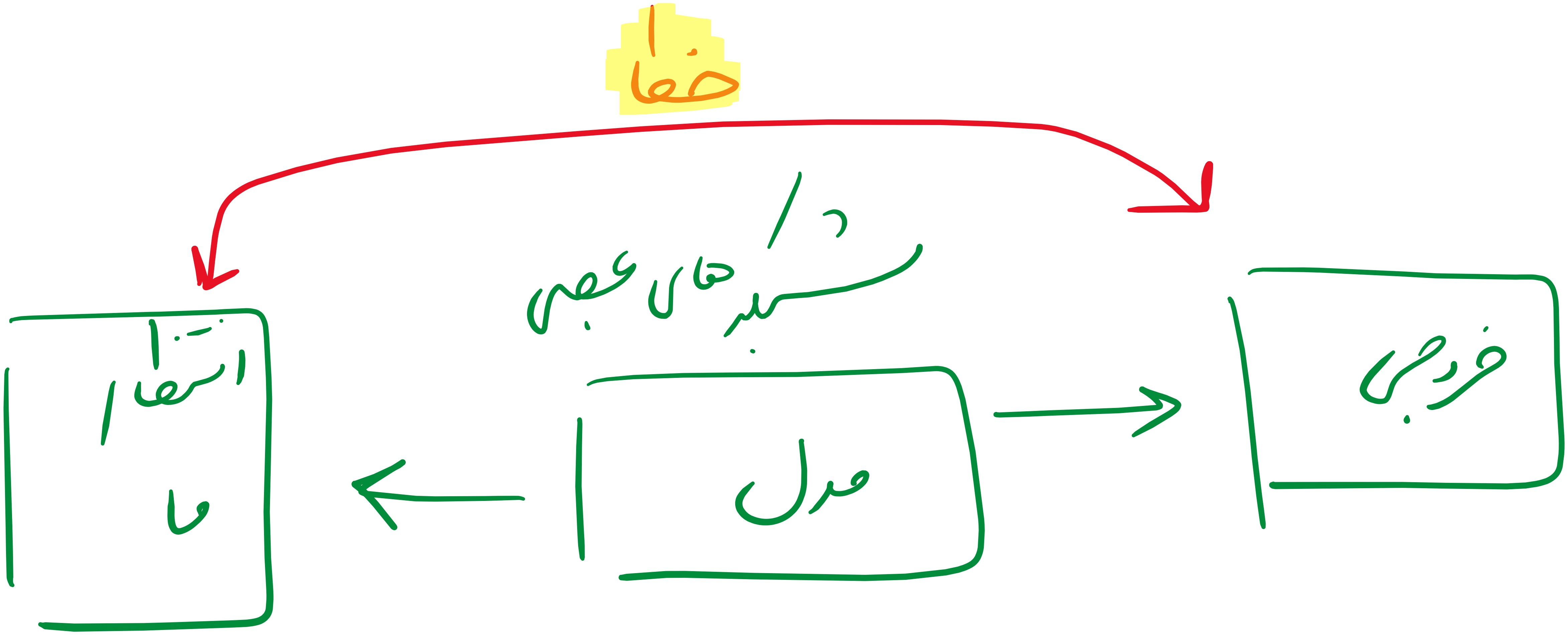
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3×3

مربعی $n \times n$

[illegible]

[illegible]



خطا
شبکه‌های عصبی
استفاده
حل
خروجی

نرم p :

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$$

بردار $\rightsquigarrow$ $\vec{x} =$ [۲ ۳ ۵]

~~[illegible]~~

$L^0 \Leftarrow p=0 \Leftarrow$ اگر جای p، 0 بگذاریم

$$\|x\|_p = \Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

$$\|x\|_0 = \Big(\sum_i \underbrace{\cancel{|x_i|^0}}_{1}\Big)^{\cancel{1/0}} \rightsquigarrow$$ تعداد عناصر غیر صفر بردار x

$L^0 =$ تعداد عناصر غیر صفر کل x

$$P = 1 \rightsquigarrow L^1$$

$$\|x\|_1 = \left(\sum_i |x_i|^1\right)^{1/1} = \sum_i |x_i|$$

L

$$x = [\,۱ \quad -۱۰ \quad ۱۲\,] \xrightarrow{L^1 = ?} |۱| + |-۱۰| + |۱۲|$$

$$= \boxed{۲۳}$$

$P = 2 \rightsquigarrow L^{2}$ = نرم اقلیدسی

$$\|x\|_{۲} = \left(\sum_{i} |x_i|^{۲}\right)^{۱/۲} = \sqrt{\sum_{i} |x_i|^{۲}}$$

$$x = [۱ \quad ۵ \quad ۷] \xrightarrow{L^{2}}$$

$$\sqrt{\underbrace{\cancel{|۱|^{۲}}}_{۱} + \underbrace{\cancel{|۵|^{۲}}}_{۲۵} + \underbrace{\cancel{|۷|^{۲}}}_{۴۹}} = \sqrt{۱+۲۵+۴۹} = \sqrt{۷۵}$$

نرم اقلیدسی مربعی :

$$x^T x$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= ۱ + ۹ + ۴ = \boxed{۱۴}$$

یک ماتریس

نرم ماتریس :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \|A\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{10}}$$

نرم ها :

۱) نامنفی هستند.

$$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_i |x_i|^2}$$

۲) صفر است <=> بردار صفر باشد.

۳) نامساوی مثلث ✓

$$\|\underline{u+v}\| \le \|u\| + \|v\|$$

$$\underline{u} = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad v = [1 \quad 1 \quad 1] \Rightarrow [2 \quad 3 \quad 4]$$

$$\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$$

4) $k \in \mathbb{R}$ اسکالر
ست
u یک بردار.

جبر خطی

۱) اعمال سطری مقدماتی $\Rightarrow$ ماتریس کاهش یافته

۲) $\mathrm{rank}(A)$

یک ماتریس

اعمال سطری - ستونی روی ماتریس ها:

۱) جابجایی ۲ سطر

۲) ضرب یک سطر در یک عدد غیرصفر (حقیقی)

۳) جمع با ضریبی از یک سطر با سطر دیگر

ماتریس
الحاقی
یا افزوده

برای تبدیل شدن ماتریس A تا حد امکان به ماتریس

چی؟

ماتریس کاهش یافته

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \times 2$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 0 \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \\ & 0 & 1 \end{array}$$

تبدیل کنیم به ماتریس همانی

I_2

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \times \frac{1}{8} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{0 \quad 1} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ -3 \end{array} \qquad 3 - 3 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

صورت کاهش یافته
ماتریس
A ماتریس

$$\rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \quad \xrightarrow[\text{تا حد امکان}]{} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\times -4$

$+4 \qquad -8-2$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \cancel{1}\ {-4} & \cancel{-1}\ {+4} & \cancel{2}\ {-8} \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{+5} & \boxed{-10} \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\times -6 \begin{bmatrix} \cancel{1}^{-6} & \cancel{-1}^{+6} & \cancel{2}^{-12} \\ 0 & 5 & -10 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \times \tfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 = 1 & -10 \\ 0 & +5 = 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$6 = 0$$

$$= \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times -5 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$-1 = 0, \quad 5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تا حد امکان به ماتریس صفر تبدیل بشن.

بعد ۱

$\text{rank}(A) = \boxed{2}$

فرض کنید A یک ماتریس باشد :

رتبه

$\text{rank}(A)$ = تعداد سطرهای غیرصفر

ماتریس پلکانی سطری A

A $\Longrightarrow$ با استفاده از اعمال سطری-مقدماتی $\Longrightarrow$ ماتریس پلکانی

$\bar{A}$

تعداد سطرهای غیرصفر

مستقل ضما - وابسته ضما

ترکیب خطی :

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n}_{\text{اعداد حقیقی.}} \in \mathbb{R}$$

ترکیب خطی از بردارهای $v_1, \dots \longrightarrow v_n$

$$\boxed{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_nv_n}$$

مستقل خطی :

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{مستقل خطی}} \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad \dots \quad c_n = 0$$

$$c_i = 0 \qquad \underline{i = 1, \dots, n}$$

وگر رستن ضوا نباشد => و استبدضوا

$$A = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\} \rightsquigarrow$$

مستقل خطی

وابسته خطی

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$$

$\boxed{\text{مستقل خطی}}$

$$\boxed{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$c_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\0\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_2\\c_2\\c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_3\\2c_3\\3c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + \underbrace{c_2} + c_3 \\ c_2 + 2c_3 \\ c_1 + \underbrace{c_2} + 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_2 + 2c_3 = 0 \rightsquigarrow c_2 = -2c_3 \;*$$

$$\boxed{c_3 = 0}$$

$$\begin{cases} c_1 - 2c_3 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_3 + 3c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{c_1} - \cancel{c_3} = 0 \\ c_1 + \cancel{c_3} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{c_1 = 0}$$

$$\boxed{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$$

مستقل خطی ✓

بردار $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$ را به شکل ترکیب خطی ۳ بردار زیر بنویسید

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = b$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = b$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$c_1 + 1c_2 + 2c_3 = 4$$

$$4c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 13$$

$$-2c_1 + 1c_2 + 3c_3 = 5$$

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 13 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

ماتریس افزوده

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 13 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{\times -1/2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right] \quad -3$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{2}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$-\tfrac{1}{2} c_3 = \frac{17}{2} \rightsquigarrow \boxed{c_3 = -17}$$

$$\rightarrow c_2 + \tfrac{5}{2} \underset{-17}{c_3} = \tfrac{3}{2}$$

$$c_2 - \frac{85}{2} = \tfrac{3}{2}$$

$$c_2 = \frac{88}{2}$$

$$\boxed{c_2 = 44}$$

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 4$$

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 4 \qquad c_3 = -17 \qquad c_2 = 44$$

$$c_1 + \underbrace{\cancel{44}}_{} \overset{+10}{} \; + \overset{-34}{\cancel{2(-17)}} = 4$$

$$\boxed{c_1 = 4 - 10 = -6}$$

$$c_1 = -6$$

$$c_2 = 44$$

$$c_3 = -17$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = b$$

$$\boxed{-6v_1 + 44v_2 - 17v_3 = b}$$

[illegible] :

مقدار ویژه

بردار ویژه

فرض کنید A یک ماتریس باشد:

$$Av = \lambda v$$

مقدار ویژه

بردار ویژه

$$Av = \lambda v \implies Av - \underbrace{\lambda v} = 0$$

$$Av - \lambda I v = 0$$

$$\boxed{(A - \lambda I)\, v = 0}$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)}\,v \neq 0$$

یک دستگاه همگن با n معادله n مجهول.

مقدار ویژه

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

$$[A-\lambda I] \Leftarrow A$$

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

$$A=\begin{bmatrix}1+\sqrt{3} & 6\\ 1 & 1-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

مقدار ویژه = ?

بردار ویژه = ?

۱) گام ⇒ $A-\lambda I$

$$\begin{bmatrix}1+\sqrt{3} & 6\\ 1 & 1-\sqrt{3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}-\lambda & 6\\ 1 & 1-\sqrt{3}-\lambda\end{bmatrix}$$

[illegible] : $\underbrace{\det(A-\lambda I)}=0$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3}-\lambda & 6 \\ 1 & 1-\sqrt{3}-\lambda \end{bmatrix}$$

$-$

$$=\underbrace{(1+\sqrt{3}-\lambda)(1-\sqrt{3}-\lambda)}-6$$

$$=\lambda^2-2\lambda-2-6=\boxed{\lambda^2-2\lambda-8=0}$$

$$\lambda^{۲} - ۲\lambda - ۸ = ۰$$

$$\Delta = (-۲)^{۲} - ٤(۱)(-۸) = ۳۶$$

$$\lambda_{۱} = \frac{+۲ + ۶}{۲} = \boxed{٤}$$

$$\lambda_{۲} = \frac{+۲ - ۶}{۲} = \boxed{-۲}$$

$\underbrace{\lambda_1 = ۴}$ $\rightarrow$ بردار ویژه

$\underbrace{\lambda_۲ = -۲}$ $\rightarrow$ بردار ویژه $\rightarrow$ ۲ تا بردار ویژه داریم.

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow Av - \lambda I v = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(A - \lambda I)v = 0} \rightarrow$$

(1) جایگذاری λ

(2) v بدست بیاریم.

$$\lambda = 4 \rightsquigarrow \quad (\underbrace{A - \lambda I}) \, v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3}-\lambda & 6 \\ 1 & 1-\sqrt{3}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 4}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{1+\sqrt{3}-4} \;\; -3+\sqrt{3} & 6 \\ 1 & \cancel{1-\sqrt{3}-4} \;\; -3-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3+\sqrt{3} & 6 \\ 1 & -3-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3+\sqrt{3}\, v_1 + 6\, v_2 = 0$$

$$v_1 - 3 - \sqrt{3}\, v_2 = 0$$

$$v_1 = 3+\sqrt{3}\, v_2$$

$$v_2 = 1 \quad t$$

$$v_1 = \boxed{3+\sqrt{3}}\, t$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$\lambda_{\text{۱}} = \text{۴} \sim v = \begin{bmatrix} \text{۳} + \sqrt{\text{۳}} \\ \text{۱} \end{bmatrix} t$

فضای ویژه‌ی

$\lambda = \text{۴}$:

$\sim \boxed{V_{\text{۴}} \left\{ \begin{bmatrix} \text{۳} + \sqrt{\text{۳}} \\ \text{۱} \end{bmatrix} \right\}}$

$\lambda_2 = -2 \quad \cdots \rightarrow$ بردار ویژه مربوط را بیابید.

$Av = \lambda v$ ⟵ بردار ویژه مربوط به آنها

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$ مقادیر ویژه.

حرر خطيا :

مكسر تقيم يانة

$$\det \neq 0$$

معکوس پذیر یا ماتریس های قابل
ترکیب جهت

$$A \rightarrow |A| = 0$$

معکوس سیستم یافته

تعریف :

$\boxed{A \text{ مادرش}}$

$$A \, A^{g} \, A = A$$

g معکوس

$A_{m \times n}$

$$A^g$$

$$\|$$

$$A_{\underbrace{m}\times\cancel{n}}\;G_{\cancel{n}\times\underbrace{\cancel{m}}}\qquad A_{\cancel{m}\times\underbrace{n}} = A_{m\times n}$$

A^{-1} معکوس کرد با ماتریس ها داریم :

$A^{\text{معکوس}} = A^{-1}$

A

$\underbrace{A\,A^{-1}}_{I}\,A = A$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \cancel{(1)(-3)}^{\,\cancel{-3}} - \cancel{(2)(-6)}^{\,+12} + \cancel{(3)(-3)}^{\,\cancel{-9}}$$

$$\boxed{|A| = 0}$$

[illegible]:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معکوس تعمیم یافته
ماتریس A هست یا نه؟

$$AGA = A$$

A'

G یک معکوس تعمیم یافته برای ماتریس A خواهد بود.

SND

SVD

Singular value Decomposition

تجزیه مقادیر منفرد.

$$A = \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc$$

۳ ماتریس

$$A = U \, S \, V^T$$

A: $m \times n$

U: $m \times m$ — متعامد — حاصل بردارهای ویژه‌ی ماتریس AA^T

S: $m \times n$ — قطری — مقادیر ویژه

V^T: $n \times n$ — متعامد — حاصل بردارهای ویژه‌ی ماتریس A^TA

$$B = \underbrace{A * A^T}_{\text{متقارنه.}}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

؟؟

$$\sqrt{}$$

حقیقی شود.

متعامد :

Q یک ماتریس

$$Q^T Q = Q Q^T = I$$

ماتریس متعامد معروف ،

$I_n \qquad I_2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q^T} \rightarrow \boxed{Q \cdot Q^T = I}$$

مثال :

$$\underset{۲\times۳}{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\underbrace{۲}_{m}\times\underbrace{۳}_{n}}{A} = \underset{۲\times۲}{U}\ \underset{۲\times۳}{S}\ \underset{۳\times۳}{V^T}$$

$$S = \begin{bmatrix} \bigcirc & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \bigcirc & \varnothing \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{AA^T}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{AA^T}_{B} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{bmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 22\lambda - 120 = 0$$

$\lambda_1 = 12$ $\qquad$ $\lambda_2 = 10$

$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{12}$ $\qquad$ $\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{10}$

$$S_{2\times 3} = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$A = \underbrace{U}_{\text{بردارهای ویژه}} S V^T$$

ماتریس AA^T

$$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

1 مقدار ویژه

2 بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه.

$\lambda_1 = 12 \rightarrow v$

$\lambda_2 = 10 \rightarrow u$

$\lambda_1 = 12 \quad AA^t \quad (A - \lambda I)\, v = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = v_2 \quad \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = t \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_2 = 10$

$(AA^t - \lambda I)u = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big\} \quad \begin{aligned} &u_1 + u_2 = 0 \\ &u_1 = -u_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$[v \quad u] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{۲\times۲} \qquad U_{2\times 2}$$

متعامد ،

$$\sqrt{(1)^۲ + (-1)^۲} = \sqrt{2}$$

متعامد

$$U_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

V^T

$A^TA \longrightarrow$ ① مقادیر ویژه $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$

$\underbrace{A_{۲\times۳} \quad A^T_{۳\times۲}}$

$A^T_{۳\times\cancel{۲}} A_{\cancel{۲}\times۳} = V \; \boxed{۳\times۳}$

② $\left\{ \begin{array}{l} v \\ u \\ t \end{array} \right.$

$$\begin{array}{ccc} v & u & t \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} v & u & t \end{bmatrix}$$

$\leadsto V_{3\times3}$ $\boxed{\text{متعامد}}$

$$v_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\cancel{(2)^2} + \cancel{(1)^2} + \cancel{(-5)^2}}$$

$$\sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$

$V_{3\times3}$ ترانهاده

$$\underbrace{A} = \underbrace{\underbrace{U * S}_{B} * V^T}_{A}$$

جمع‌بندی

PCA

PCA : تحلیل مولفه اساسی

واریانس

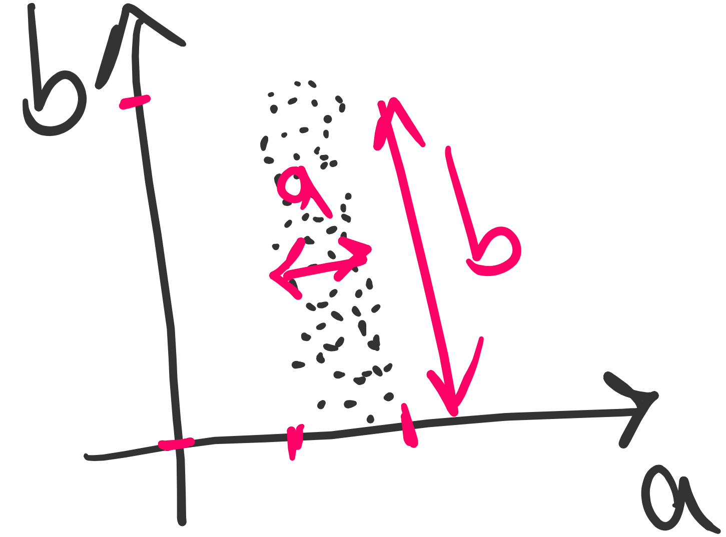
کوواریانس

محاسبه

$\mathrm{Cov}(X_1, X_p)$

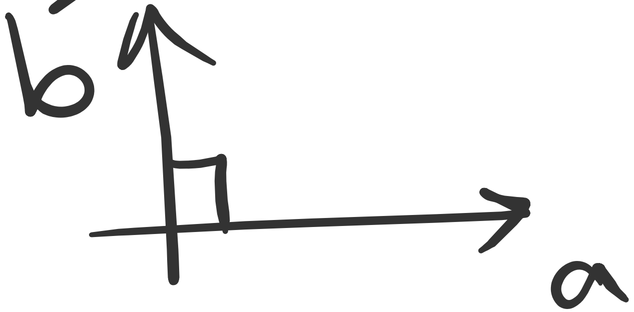
$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longleftrightarrow & X_p & \cdots & X_n \\ \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_p \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\underline{V}ar(\underline{X}_1)$



$Var(b) > var(a)$

$\underbrace{Cov(X_1, X_2) = 0}_{\star}$ => ۲ بردار متعامد هستند => ۲ بردار مستقل خطی هستند



$$\underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\underline{X_1}} \underset{\text{وابسته}}{\overset{Cov(X_1, X_2) \neq 0}{\longleftrightarrow}} \underset{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{\underline{X_2}} \longleftrightarrow \underset{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}{\underline{X_3}}$$

مستقل باشند

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ماتریس کوواریانس}]{} \boxed{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

ماتریس کوواریانس

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$a = 1$ $b = n$

$a = 2$ $b = 1$

$$\underline{\mathrm{Cov}(X)} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\mathrm{Var}(x_1)\\ \mathrm{Cov}(x_1, x_1)\end{matrix} & \mathrm{Cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(x_1, x_n) \\ \mathrm{Cov}(x_2, x_1) & \begin{matrix}\mathrm{Var}(x_2)\\ \mathrm{Cov}(x_2, x_2)\end{matrix} & & \mathrm{Cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathrm{Cov}(x_n, x_1) & \cdots & & \begin{matrix}\mathrm{Var}(x_n)\\ \mathrm{Cov}(x_n, x_n)\end{matrix} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(x_1, \ldots, x_p) & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}(\Sigma_r, 2_r) \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{هرن}}}$$

؟؟

۱/ محاسبه‌ی ماتریس ← $cov(X)$

۲/ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ را به‌دست بیاریم.

$$Y = U^T X$$

حاصل می‌شود ← یک ماتریس قطری ←

$$cov(Y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

کوواریانس‌ها صفر شده

یک ماتریس قطری میشه که

یک واریانس $\longrightarrow$

$$\operatorname{Cov}(Y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

مستقل هستند

جبضا :

کاربردها

ضرب ماتریس ها :

جوین در Sql

مقایسه وکتورهای خوب <= L_1

ML

L_2

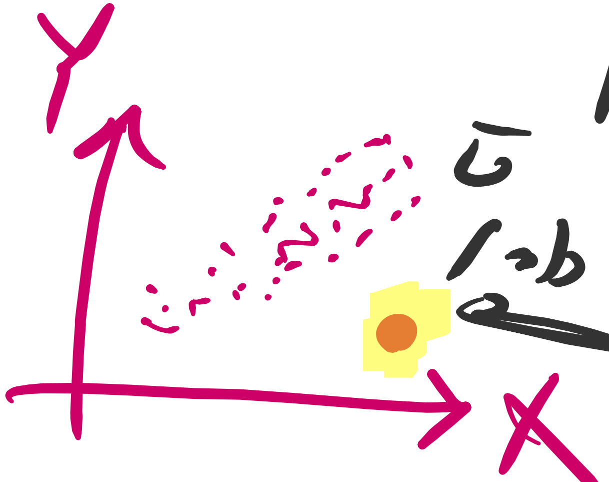
نرم

P-norm

یا اقلیدسی

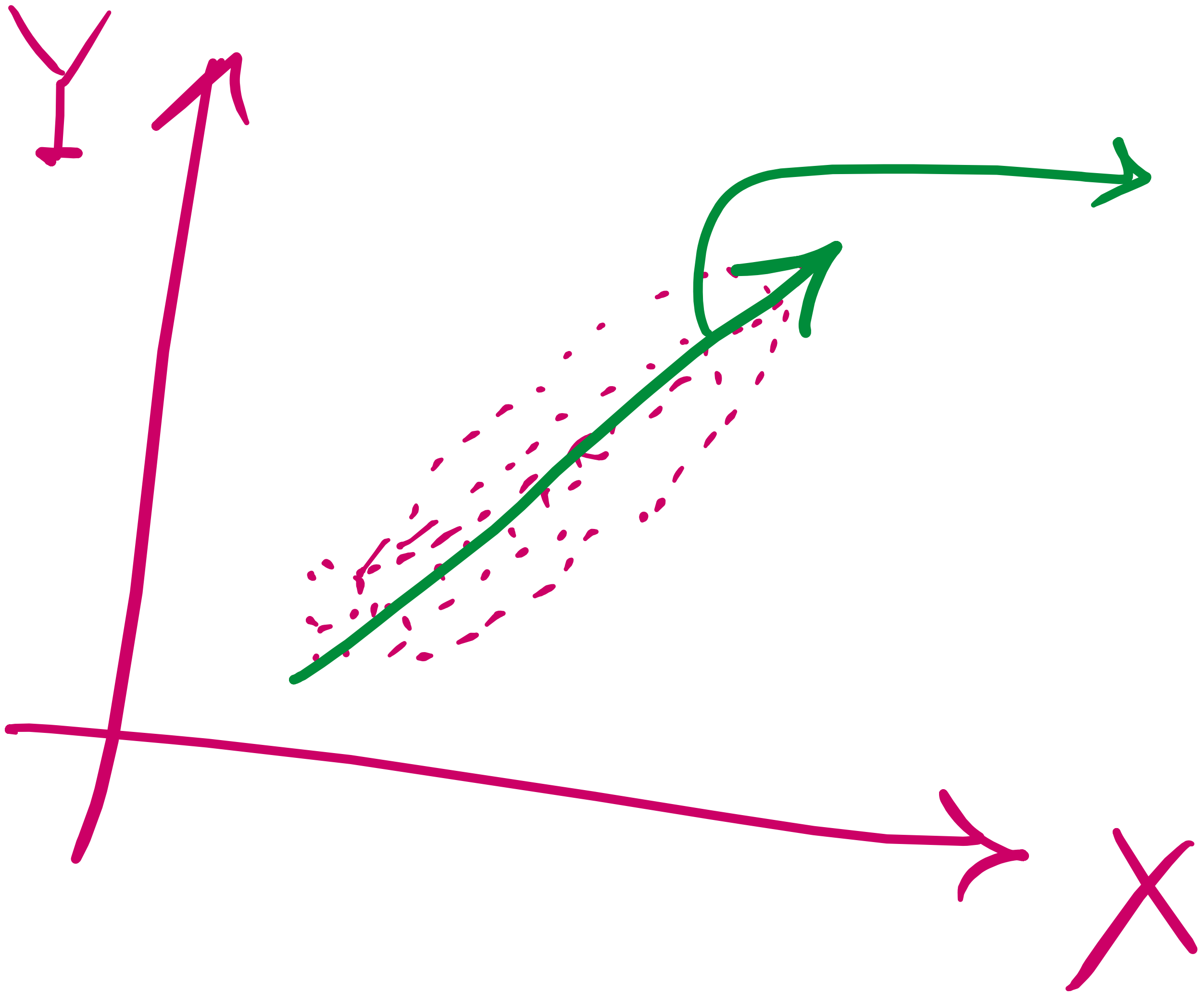
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

مواد



داده

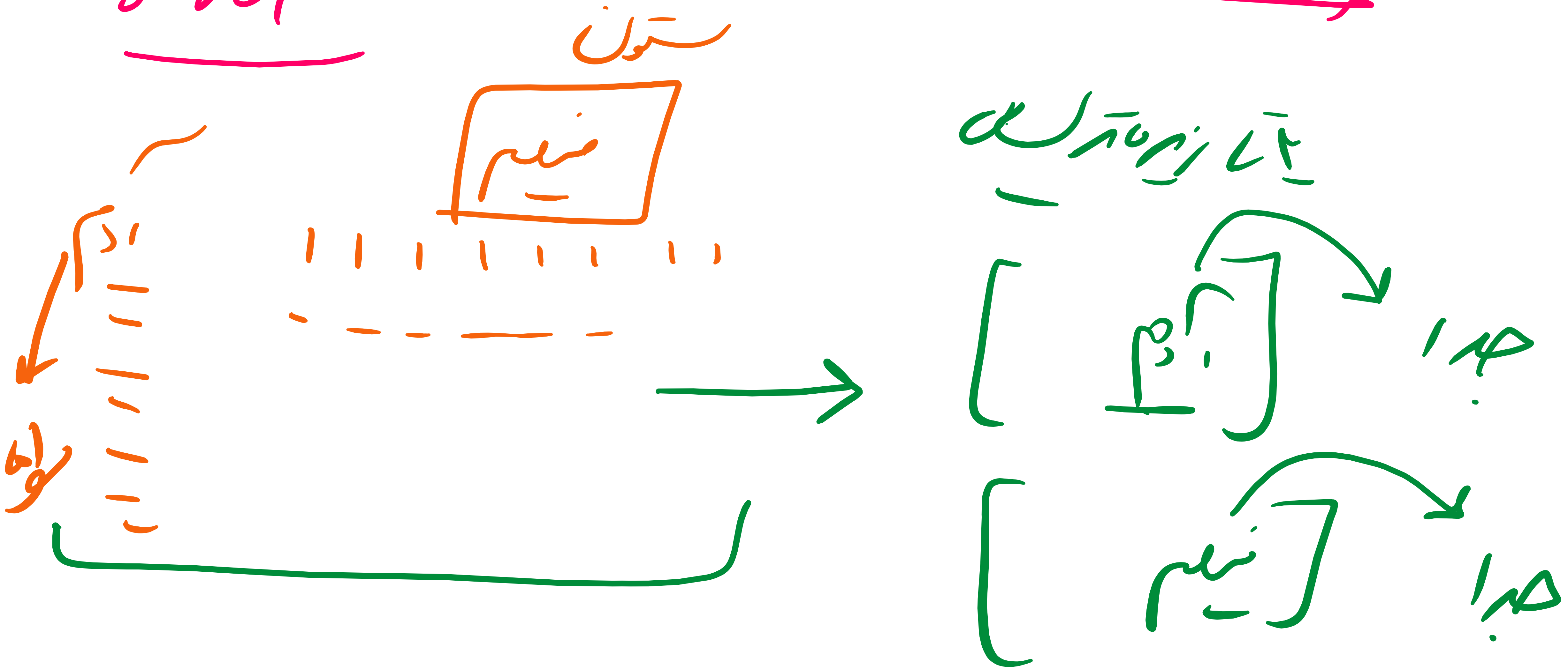
کشف داده‌ها



تعداد زیادی
دربرگیرنده

svd

ستون‌ها توجیه‌گر:



PCA

ورودی

ستون

$$X_1 \xleftrightarrow{\text{وابسته}} X_2 \;\cdots\cdots\; X_n \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

هدف

Y

$$\cancel{X_1} \xleftrightarrow{\text{وابسته}} X_2 \longrightarrow Y$$

هدف

کاهش ابعاد

$X_1 \ldots\ldots X_n$

از پیشرفت یک کلاس

در هر هفته تأثیر ندارن

بقیه رو حذف کن

۱. خوردن خوراکی X_1

۲. حرکت زبان X_2

۳. سطح مالی والدین X_3

۴. مدل ماشین X_4

مستقل $\Leftarrow$

وابسته

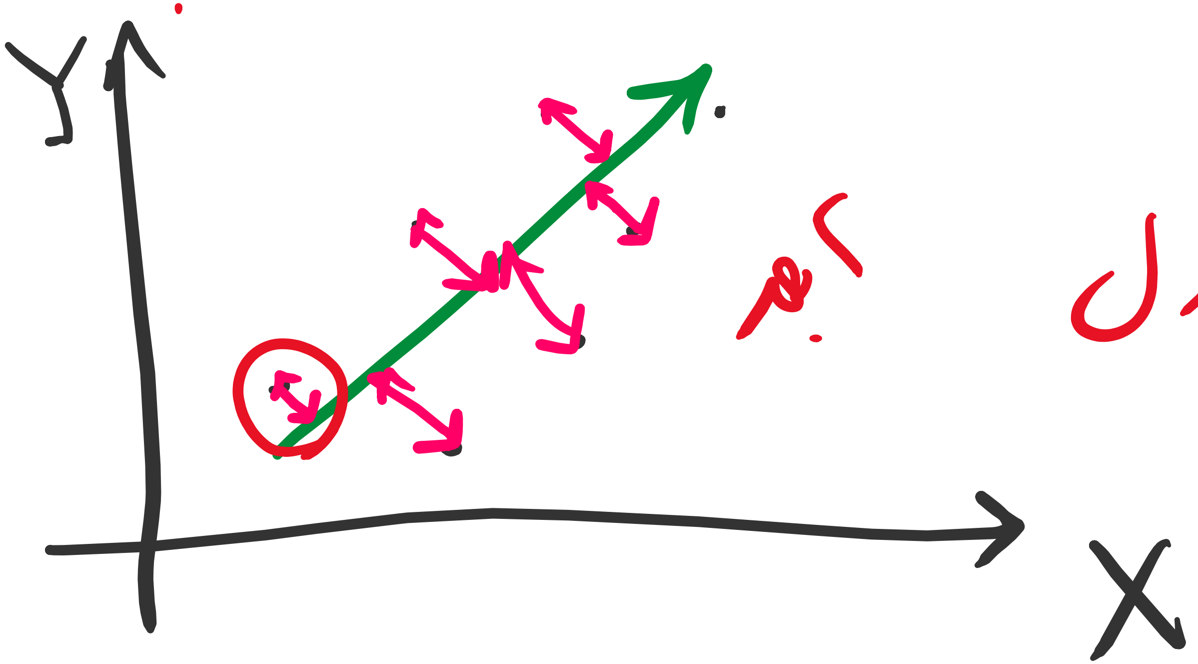
خوردن خوراکی
سطح مالی والدین
و
مدل ماشین

کاهش ابعاد

Y

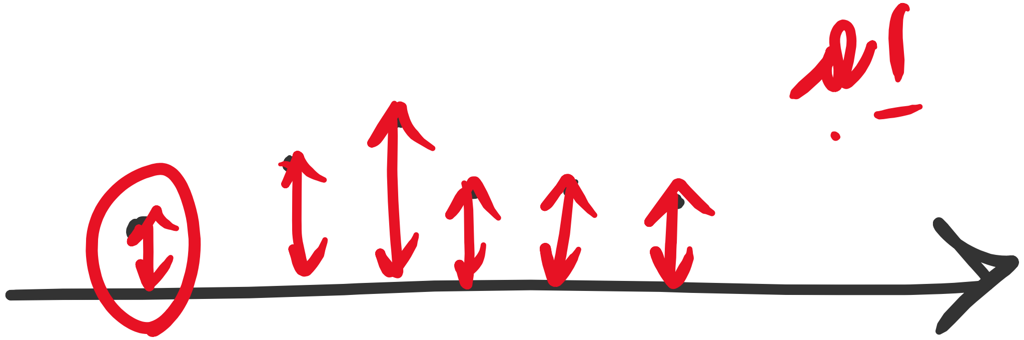
احتمال هجرت!!

PCA



إسلسله إلى مجال → ٤م

٤م



~~١٠٠٠ ه~~

٢

أبعد